

## فصل ۱ : تابع

۱۶	۷	درس (۱) مفهوم تابع
۳۰	۲۲	درس (۲) تبدیل نمودار توابع
۴۰	۳۵	درس (۳) تابع درجه سوم و توابع صعودی و نزولی
۵۱	۴۴	درس (۴) تابع یک‌به‌یک و وارون
۶۱	۵۵	درس (۵) اعمال جبری و ترکیب توابع
۷۲	۶۸	درس (۶) بخش پذیری و تقسیم

## فصل ۲ : مثلثات

۸۶	۸۰	درس (۱) زاویه و نسبت‌های مثلثاتی
۹۴	۸۹	درس (۲) دایره مثلثاتی
۱۰۴	۹۷	درس (۳) اتحادهای مثلثاتی
۱۱۳	۱۱۱	درس (۴) توابع مثلثاتی
۱۲۲	۱۱۵	درس (۵) تناوب و تابع تنازانت
۱۳۳	۱۲۷	درس (۶) معادلات مثلثاتی

## فصل ۳ : حد و پیوستگی

۱۴۷	۱۴۱	درس (۱) همسایگی و مفهوم حد
۱۵۷	۱۵۲	درس (۲) محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$ )
۱۶۷	۱۶۲	درس (۳) پیوستگی
۱۸۰	۱۷۲	درس (۴) حد بی‌نهایت
۱۸۹	۱۸۴	درس (۵) حد در بی‌نهایت

## فصل ۴ : مشتق

۲۰۲	۱۹۸	درس (۱) آشنایی با مفهوم مشتق
۲۱۶	۲۰۵	درس (۲) مشتق پذیری و پیوستگی ۱
۲۳۵	۲۲۵	درس (۳) مشتق پذیری و پیوستگی ۲
۲۴۶	۲۴۴	درس (۴) آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای

## فصل ۵ : کاربرد مشتق

۲۵۷	۲۵۲	درس (۱) اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۱
۲۷۱	۲۶۱	درس (۲) اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۲
۲۸۹	۲۷۷	درس (۳) جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
۳۰۴	۲۹۵	درس (۴) رسم نمودار توابع

## فصل

## درس نامه

## سؤال

### فصل ۶: الگو و دنباله

۳۱۹	۳۱۴	درس (۱) الگو و دنباله
۳۲۶	۳۲۲	درس (۲) دنباله حسابی
۳۳۶	۳۳۰	درس (۳) دنباله هندسی

### فصل ۷: توان‌های گویا و عبارتهای جبری

۳۵۰	۳۴۱	درس (۱) ریشه‌گیری و توان‌های گویا
۳۵۷	۳۵۳	درس (۲) عبارتهای جبری، اتحادها و تجزیه
۳۶۱	۳۶۰	درس (۳) گویا کردن مخرج کسرها

### فصل ۸: معادله و تابع درجه دوم

۳۷۲	۳۶۴	درس (۱) معادله درجه دو
۳۸۲	۳۷۶	درس (۲) تابع درجه دوم

### فصل ۹: معادله و نامعادله

۳۸۹	۳۸۷	درس (۱) معادلات گویا
۳۹۶	۳۹۱	درس (۲) تعیین علامت و نامعادله گویا
۴۰۱	۳۹۷	درس (۳) معادلات گنگ (رادیکالی)

### فصل ۱۰: قدرمطلق و جزء صحیح

۴۱۱	۴۰۴	درس (۱) قدرمطلق
۴۲۰	۴۱۵	درس (۲) جزء صحیح

### فصل ۱۱: توابع نمایی و لگاریتمی

۴۲۸	۴۲۴	درس (۱) تابع نمایی
۴۳۸	۴۳۱	درس (۲) تابع لگاریتمی

### فصل ۱۲: هندسه تحلیلی

۴۵۶	۴۴۷	درس (۱) معادله خط
-----	-----	-------------------

۳۶۴- اگر  $f(x) = x^2 + 2x, x \geq 1$ ، آن‌گاه ریشه‌های معادله  $f \circ f^{-1}(x) = x^2 - 2$  چگونه‌اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۳۶۵- اگر  $f(x) = (\sqrt{3})^x$  و  $g(x) = \log_3 x$ ، آن‌گاه ضابطه  $(f \circ g)^{-1}$  کدام است؟
- (۱)  $x^2, x \geq 0$  (۲)  $2x, x \in \mathbb{R}$  (۳)  $\frac{x}{2}, x > 0$  (۴)  $x^2, x > 0$

## درس ۱

# بخش پذیری و تقسیم

یکی از سؤال‌های معروف امتحان‌های ریاضی دوران کودکی این بود:

«عدد ۳۴ را بر عدد ۶ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید، سپس درستی تقسیم را با کمک امتحان تقسیم بررسی کنید.»

برای شروع بد نیست که این سؤال را با هم حل کنیم. این تقسیم به صورت روبه‌رو انجام می‌شود: حالا باید درستی تقسیم را بررسی کنیم. رابطه امتحان تقسیم به صورت زیر است:

مقسوم‌علیه مقسوم

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 34} \\ \underline{30} \phantom{0} \\ 4 \phantom{0} \end{array}$$

خارج قسمت ۵  
باقی‌مانده ۴

باقی‌مانده + خارج قسمت  $\times$  مقسوم‌علیه = مقسوم

$$34 = 6 \times 5 + 4 \quad \checkmark$$

یه کم که بزرگ‌تر شدیم تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را یاد گرفتیم. از اون‌جا که می‌دونم یاد تونه! یک نمونه هم از این تقسیم انباشته داریم.

فرض کنید می‌خواهیم چندجمله‌ای  $1 - 2x^4 + 3x^3$  را بر  $2x^2 - 2$  تقسیم کنیم. روش کار به ترتیب زیر است:

$$\begin{array}{r} \phantom{2x^2} \overline{) 2x^4 + 3x^3 - 1} \\ \underline{-(2x^4 - 4x^2)} \phantom{0} \\ 3x^3 + 4x^2 - 1 \\ \underline{-(3x^3 - 6x)} \phantom{0} \\ 4x^2 + 6x - 1 \\ \underline{-(4x^2 - 8)} \phantom{0} \\ 6x + 7 \end{array}$$

باقی‌مانده  $6x + 7$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 2 \\ \underline{2x^2 + 3x + 4} \\ \phantom{2x^2} \end{array}$$

خارج قسمت

- ابتدا  $1 - 2x^4 + 3x^3$  (مقسوم) را استاندارد می‌کنیم:  $2x^4 + 3x^3 - 1$
- جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم را بر جمله با بزرگ‌ترین درجه مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و در خارج قسمت می‌نویسیم:
- عبارت به دست آمده در خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب و از مقسوم کم می‌کنیم:
- حال با تکرار مراحل ۲ و ۳ تقسیم را ادامه می‌دهیم، تا جایی که درجه چندجمله‌ای باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کم‌تر باشد.

می‌توانید این تقسیم را به صورت سریع هم انجام دهید. برای این کار کافی است که تنها ضرایب مقسوم و مقسوم‌علیه را نوشته و عمل تقسیم را انجام دهید. فقط باید دقت کنید که باید ضرایب توان‌هایی از  $x$  را که وجود ندارند، صفر قرار دهید. در مثال بالا چون در مقسوم  $x^2$  و  $x$  نداریم، ضرایب آن‌ها را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{r} 2300-1 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \underline{-(20-4)} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 340 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \underline{-(30-6)} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 46-1 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \underline{-(40-8)} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 67 \end{array}$$

$6x + 7 \Rightarrow$  باقی‌مانده

به طور قطع این تقسیم هم رابطه امتحان تقسیم دارد. این رابطه هم همانند رابطه قبل است، یعنی: باقی‌مانده + خارج قسمت  $\times$  مقسوم‌علیه = مقسوم: رابطه فقط چون این‌جا با چندجمله‌ای‌ها سروکار داریم رابطه را بر حسب  $x$  بیان می‌کنیم:  $P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$  رابطه

به عنوان مثال در تقسیم مثال قبل داریم:

$$2x^4 + 3x^3 - 1 = (x^2 - 2)(2x^2 + 3x + 4) + 6x + 7$$

اگر درجه مقسوم  $n$  و درجه مقسوم‌علیه  $m$  باشد ( $n \geq m$ )، درجه خارج قسمت  $n - m$  و درجه باقی‌مانده حداکثر  $m - 1$  می‌باشد.

**تست** در تقسیم  $3 - ax^2 + x^n$  بر  $x^2 - 1$ ، خارج قسمت  $2 + x^2$  و باقی‌مانده  $x^2 + b$  شده است.  $n + a - b$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

**پاسخ گزینه ۲** اولاً مقسوم از درجه  $n$ ، مقسوم‌علیه از درجه ۳ و خارج قسمت از درجه ۲ است، پس طبق نکته قبل داریم:  $n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$

پس مقسوم به صورت  $x^5 + ax^3 - 3$  است. حالا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = (x^2 - 1)(x^3 + 2) + x^2 + b$$

$$\Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2 + x^2 + b \Rightarrow x^5 + ax^3 - 3 = x^5 + 2x^3 - 2 + b$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \\ -3 &= -2 + b \Rightarrow b = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n + a - b = 5 + 2 - (-1) = 8$$

حالا با متحد قراردادن جمله‌ها، مجهول‌ها را می‌یابیم:

## محاسبه باقی مانده تقسیم

### محاسبه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$

وقتی  $P(x)$  را بر  $ax + b$  تقسیم می‌کنیم، باقی مانده حداکثر می‌تواند از درجه صفر (یا همان عدد ثابت) باشد، پس رابطه تقسیم به صورت زیر نوشته می‌شود ( $R$  یعنی یک عدد ثابت):

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

حالا برای محاسبه  $R$ ، باید  $Q(x)$  را طوری از رابطه حذف کرد که فودش هم متوجه نشه! برای این کار ضریب  $Q(x)$  را صفر می‌کنیم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

پس اگر در رابطه تقسیم،  $x = -\frac{b}{a}$  را قرار دهیم،  $R$  محاسبه می‌شود:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times Q(x) + R \Rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $ax + b$  برابر است با:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

### تست باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6$ بر $x + 2$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۱۰ (۳)

۳۴ (۲)

۱۸ (۱)

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

مقسوم‌علیه یک چندجمله‌ای از درجه اول است. ریشه این عبارت برابر است با:

$$R = P(-2) = 2(-2)^4 + (-2)^3 - 6 = 2(16) - 8 - 6 = 18$$

پس برای محاسبه باقی مانده کافی است،  $P(-2)$  را محاسبه کنیم:

### پاسخ گزینه ۱

**نکته** چندجمله‌ای  $P(x)$  را بر چندجمله‌ای  $D(x)$  بخش‌پذیر گویند، هرگاه باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $D(x)$  صفر شود و برعکس.

**تست** باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x) = x^4 - ax^3 + x^2 + b$  بر  $x + 1$  برابر ۹ است. اگر این چندجمله‌ای بر  $x - 2$  بخش‌پذیر باشد،

$a - b$  کدام است؟

-۷ (۴)

۷ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

$P(-1) = 9 \Rightarrow 1 + a + 1 + b = 9 \Rightarrow a + b = 7$  (\*) باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $(x + 1)$  برابر ۹ است، در نتیجه:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a + 4 + b = 0 \Rightarrow 8a - b = 20$$
 (\*\*\*)

(\*\*\*)

از طرفی  $P(x)$  بر  $(x - 2)$  بخش‌پذیر است، پس:

با حل دستگاه معادلات (\*) و (\*\*\*) داریم:

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 8a - b = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 9a = 27 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{(*)} 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a - b = 3 - 4 = -1$$

### باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بیشتر از یک

در این جا نیز همانند بالا (طبق رابطه تقسیم) مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم و بزرگ‌ترین جمله مقسوم‌علیه را بر حسب جملات با درجه کم‌تر مرتب می‌کنیم و در نهایت رابطه حاصل را در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه عبارت حاصل، کم‌تر از درجه مقسوم‌علیه باشد. در این حالت عبارت حاصل همان باقی مانده تقسیم است. *عمر آنگه متوجه شده باشین! 😊 بریم با مثال توضیح بدم:*

فرض کنید می‌خواهیم باقی مانده تقسیم  $P(x) = x^5 - 2x^4 + x - 1$  بر  $x^2 - 1$  را محاسبه کنیم. برای این کار از یکی از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

① مقسوم‌علیه از درجه دوم است. پس باقی مانده حداکثر از درجه یک است. بنابراین می‌توانیم باقی مانده را به صورت  $ax + b$  در نظر بگیریم.

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) \Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$$

حالا رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

برای محاسبه  $a$  و  $b$ ، باید یک کاری کنیم  $Q(x)$  حذف شود. پس  $x = 1$  و  $x = -1$  را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x = 1 : 1 - 2 + 1 - 1 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = -1 \\ x = -1 : -1 - 2 - 1 - 1 = 0 - a + b \Rightarrow -a + b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \xrightarrow{a+b=-1} a = 2$$

پس باقی مانده تقسیم، برابر  $2x - 3$  است.

۲ رابطه تقسیم با فرض این که  $R(x)$  باقی مانده است، به صورت مقابل است:  
 $x^5 - 2x^4 + x - 1 = Q(x)(x^2 - 1) + R(x)$   
 برای حذف  $Q(x)$  و محاسبه  $R(x)$ ، باید ضریب  $Q(x)$  را برابر صفر قرار دهیم:  
 $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$   
 حالا مقسوم را بر حسب  $x^2$  مرتب می کنیم و سپس به جای  $x^2$  مقدار ۱ قرار می دهیم:  
 $\Rightarrow x^5 - 2x^4 + x - 1 \xrightarrow{\text{بر حسب } x^2 \text{ می نویسیم}} = (x^2)^2 x - 2(x^2)^2 + x - 1$   
 $\xrightarrow{\text{جای } x^2 \text{ ها، ۱ می گذاریم}} = 1^2(x) - 2(1)^2 + x - 1 = x - 2 + x - 1 = 2x - 3$

**تست** به چند جمله ای  $P(x) = x^6 - 3x^5 + ax$  چند واحد اضافه کنیم تا بر عبارت  $x^2 - 4$  بخش پذیر باشد؟

۶۴ (۱)      -۶۴ (۲)      ۴۸ (۳)      -۴۸ (۴)

**پاسخ گزینه ۲** فرض کنیم به  $P(x)$ ، مقدار  $b$  واحد اضافه کنیم؛ در این حالت عبارت  $x^6 - 3x^5 + ax + b$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است. حالا برای حل دو تا روش داریم:

**راه اول** از آن جا که  $P(x)$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم آن ها صفر است، پس طبق رابطه تقسیم داریم:  
 $x^6 - 3x^5 + ax + b = (x^2 - 4)Q(x) + 0$   
 با قراردادن  $x = 2$  و  $x = -2$ ، از شر  $Q(x)$  خلاص میشیم! پس:

$$\left. \begin{aligned} \xrightarrow{x=2} 64 - 96 + 2a + b = 0 &\Rightarrow 2a + b = 32 \\ \xrightarrow{x=-2} 64 + 96 - 2a + b = 0 &\Rightarrow 2a - b = 16 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 4a = 192 \Rightarrow a = 48 \xrightarrow{2a+b=32} b = -64$$

**راه دوم** مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و آن را بر حسب بزرگترین جمله آن می نویسیم:  
 $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$   
 حالا چند جمله ای  $x^6 - 3x^5 + ax + b$  را بر حسب  $x^2$  مرتب می کنیم و سپس به جای  $x^2$  ها مقدار ۴ قرار می دهیم:  
 $(x^2)^3 - 3(x^2)^2 x + ax + b = 4^3 - 3(4)^2 x + ax + b = 64 - 48x + ax + b \Rightarrow (a - 48)x + b + 64$   
 باقی مانده:  $(a - 48)x + b + 64 = 0$   
 چون باید باقی مانده برابر صفر باشد، پس:  
 $\begin{cases} a - 48 = 0 \Rightarrow a = 48 \\ b + 64 = 0 \Rightarrow b = -64 \end{cases}$  متجدد قراردادن

**تست** اگر باقی مانده تقسیم  $1 + 3x^6 - 28x^2 + ax^3 + x^3$  بر  $x^2 + ax$  برابر ۱ باشد،  $a$  کدام است؟

±۷ (۴)      ±۴ (۳)      ±۲ (۲)      ±۱ (۱)

**پاسخ گزینه ۲** مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و آن را بر حسب بزرگترین جمله آن می نویسیم:  
 $x^2 + ax = 0 \Rightarrow x^2 = -ax$   
 حالا مقسوم را بر حسب  $x^2$  مرتب می کنیم و سپس به جای  $x^2$  ها  $-ax$  قرار می دهیم و این کار را تا جایی انجام می دهیم که تمام  $x$  ها کم تر از ۳ (درجه مقسوم علیه) شود

$$\begin{aligned} 1 + 3x^6 - 28x^2 + ax^3 + x^3 &= (-ax)^3 x + 3(-ax)^2 - 28ax^2 + 1 = -a^3x^4 + 3a^2x^2 - 28ax^2 + 1 = -a^3x^4 + 3a^2x^2 - 28ax^2 + 1 \\ &= -a^3(x^2)x + 3a^2x^2 - 28ax^2 + 1 = -a^3(-ax)x + 3a^2x^2 - 28ax^2 + 1 = a^4x^2 + 3a^2x^2 - 28ax^2 + 1 \\ &= (a^4 + 3a^2 - 28)x^2 + 1 \end{aligned}$$

باقی مانده  $(a^4 + 3a^2 - 28)x^2 + 1$   
 چون باقی مانده برابر ۱ است؛ بنابراین باید ضریب  $x^2$  برابر صفر باشد (تذکره ش ۱):  
 $a^4 + 3a^2 - 28 = 0 \Rightarrow (a^2 + 7)(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

**محاسبه باقی مانده بدون داشتن مقسوم**

در بعضی از سوالات مقسوم را نمی دهند و از شما باقی مانده را می خواهند. در این جا فقط باید از رابطه تقسیم کمک بگیرید تا با خیال راحت جواب را محاسبه کنید. فقط حتماً باید به درجه مقسوم علیه برای تعیین درجه باقی مانده توجه کنید.

**تست** اگر باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x + 1$  و  $x - 3$  به ترتیب برابر ۲ و ۶ باشد، باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$  کدام است؟

$x - 1$  (۱)       $-x + 2$  (۲)       $3x - 1$  (۳)       $x + 3$  (۴)

**پاسخ گزینه ۲** باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x + 1$  برابر ۲ است، پس:  
 $P(-1) = 2$   
 از طرفی باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x - 3$  برابر ۶ است، پس:  
 $P(3) = 6$



تقسیم	توضیح	رابطه
$x^n - y^n$ بر $x + y$	$x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ $\Rightarrow P(-y) = (-y)^n - y^n$ اگر $n$ زوج باشد، حاصل مقدار بالا که همان باقی‌مانده است صفر می‌شود، پس $x^n - y^n$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.	$n \in 2k: x^n - y^n$ زوج $= (x + y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$
$x^n + y^n$ بر $x - y$	$x - y = 0 \Rightarrow x = y$ $\Rightarrow P(y) = y^n + y^n$ $P(y)$ تحت هیچ شرایطی برای $n$ صفر نمی‌شود. پس $x^n + y^n$ هیچ‌گاه بر $x - y$ بخش‌پذیر نیست.	_____
$x^n + y^n$ بر $x + y$	$x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ $\Rightarrow P(-y) = (-y)^n + y^n$ اگر $n$ فرد باشد، حاصل مقدار بالا صفر می‌شود و در نتیجه $x^n + y^n$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.	$n \in 2k+1: x^n + y^n$ فرد $= (x + y) \times (x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

**تست** حاصل  $\frac{x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1}{x + 1}$  به ازای  $x = \sqrt{3}$  کدام است؟

۱۲۲ (۴)      ۲۴۴ (۳)      ۱۲۱ (۲)      ۲۴۲ (۱)

**پاسخ گزینه ۲** **راه اول** صورت و منخرج را در  $x - 1$  ضرب می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{(x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x+1)} \xrightarrow{\text{اتحاد (۱)}} \text{عبارت} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$

$$= \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121$$

**راه دوم** صورت کسر، مجموع  $10$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 1$  و قدرنسبت  $q = x$  است، پس:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1(x^{10} - 1)}{x - 1}$$

پس کل کسر به صورت روبه‌رو درمی‌آید:

$$\frac{1 + x + x^2 + \dots + x^9}{x + 1} = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} = \frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$$

با جای‌گذاری  $x = \sqrt{3}$ ، داریم:

$$\frac{(\sqrt{3})^{10} - 1}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- بخش‌پذیری و تقسیم**
- ۳۶۶- در تقسیم عبارت  $x^3 + (x+2)^2(x-2) - 4x^2$ ، خارج‌قسمت کدام است؟  
 ۲x - 4 (۴)      ۲x - 2 (۳)      x - 2 (۲)      x<sup>2</sup> - 2x (۱)
- ۳۶۷- باقی‌مانده تقسیم عبارت  $x^2 + 2ax + 1 - ax^3$  بر  $x + 1$  برابر ۴ است.  $a$  کدام است؟  
 ۴ (۴)      ۱ (۳)      -۱ (۲)      -۴ (۱)
- ۳۶۸- اگر چندجمله‌ای  $P(x) = x^2 - mx^2 - x - 4$  بر  $x + 2$  بخش‌پذیر باشد،  $m$  کدام است؟  
 -۰/۵ (۴)      ۰/۵ (۳)      -۲/۵ (۲)      ۲/۵ (۱)

(ریاضی ۸۰)

۳۶۹- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $2x^2 + mx + 2$  بر  $x + 1$  برابر ۲ باشد، باقی مانده تقسیم آن بر  $(x - 1)$  کدام است؟ (۴۰.ق)

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۷۰- به ازای یک مقدار  $a$ ، چندجمله‌ای  $P(x) = 2x^2 + ax^2 + 2x^2 - 3x$  بر  $2x - 1$  بخش پذیر است. در این حالت، باقی مانده  $P(x)$  بر  $x + 2$ ، کدام است؟ (ریاضی قارچ ۹۹)

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۷۱- دو عبارت  $9 + 4x^2 + x^5$  و  $ax^2 - x - 1$  در تقسیم بر  $x + 2$  هم باقی مانده هستند.  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۷۲- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x) = x^3 + ax^2 + x - b$  بر  $x - 1$  برابر ۳ و  $P(x)$  بر  $x + 2$  بخش پذیر باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۱

۳۷۳- فرض کنید باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای  $p(x)$  بر  $x - 4$  و  $x + 2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی مانده تقسیم  $p(x) + 4p(-x)$  بر  $x - 2$ ، کدام است؟ (تبری قارچ ۹۹)

- (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

۳۷۴- اگر باقی مانده تقسیم  $P(x) = 2x^{2n+1} + ax^2 + bx^2 - 1$  بر  $x + 1$  برابر ۵ باشد، باقی مانده تقسیم  $T(x) = ax^3 - 2bx^2 + x - 1$  بر  $x - 2$  کدام است؟

- (۱) -۶۳ (۲) ۶۵ (۳) -۳۱ (۴) ۳۳

۳۷۵- اگر تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 6$  بر  $x - 2$  بخش پذیر باشد، مجموع ریشه‌های تابع  $f$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

۳۷۶- به ازای مقداری از  $a$ ، چندجمله‌ای  $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$  بر  $x + 2$  بخش پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- (۱)  $1 - \sqrt{3}$  (۲)  $1 - \sqrt{5}$  (۳)  $-1 - \sqrt{3}$  (۴)  $-1 - \sqrt{5}$

۳۷۷- در تقسیم  $3 + bx^2 + 4x^3 + x^4$  بر  $x^2 + ax - 1$ ، خارج قسمت  $x + 2$  و باقی مانده  $3x + 5$  شده است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۳۷۸- اگر باقی مانده تقسیم عبارت  $x^5 - 4x^3 - 3x^2 + x^4 + 3x^2 - x - 1$  بر  $R(x)$  باشد،  $R(-1)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۳۷۹- عبارت  $1 + 2bx^2 + fax^2 + x^2 - 4$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است.  $a + b$  کدام است؟ (ریاضی ۱۸۶)

- (۱)  $-\frac{15}{8}$  (۲)  $-\frac{17}{16}$  (۳)  $\frac{17}{16}$  (۴)  $\frac{15}{8}$

۳۸۰- در صورتی که باقی مانده تقسیم  $ax^2 + bx^2 + 1$  بر  $x^2 + 1$  برابر ۱ باشد، باقی مانده تقسیم  $x^2 + ax + 2b$  بر  $x + 2$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۸۱- اگر عبارات  $k + 5x^2 - 2x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^{2n+1}$  به ازای هر عدد طبیعی  $n$  بر دو جمله‌ای  $x + 2$  بخش پذیر باشد؛ آن‌گاه باقی مانده تقسیم آن بر  $x^2 - 1$  کدام است؟ (ریاضی ۱۸۹)

- (۱)  $-3x - 6$  (۲)  $-2x + 1$  (۳)  $2x + 4$  (۴)  $2x - 4$

۳۸۲- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x) = x^3 + ax^2 - bx$  بر  $x^2 + 1$  برابر ۵ باشد،  $a - b$  کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) -۴

۳۸۳- کدام عبارت زیر را از عبارت  $1 + 2x + 5x^2 - x^3$  کم کنیم تا حاصل بر  $x^2 + 1$  بخش پذیر باشد؟

- (۱)  $x + 1$  (۲)  $x + 3$  (۳)  $x + 6$  (۴)  $x + 8$

۳۸۴- باقی مانده تقسیم عبارت  $1 - x^2 + x^2(x - 1)^2 + (x + 1)^2(x - 1)^2$  بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱)  $x + 1$  (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $-x - 1$

۳۸۵- باقی مانده تقسیم عبارت  $1 + (x + 1)(x + 2)(x + 3) + 3x$  بر  $x^2 + 3x$  کدام است؟

- (۱)  $2x + 1$  (۲) ۱ (۳) ۳ (۴)  $x + 1$

۳۸۶- باقی مانده تقسیم  $x^2 + (x^2 + 4)(x^2 + 3)(x^2 + 2)(x^2 + 1)$  بر  $x^2 + 4x^2 - 1$  کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲)  $x^2 + 5$  (۳)  $9x^2 + 36$  (۴)  $x^2 + 13x^2 + 35$

۳۸۷- باقی مانده تقسیم عبارت  $3 + (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + x + 1)$  بر  $x^2 + x + 1$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $-x + 1$  (۳)  $x + 3$  (۴) ۴۲

۳۸۸- اگر  $R(x)$  باقی مانده تقسیم عبارت  $x + 2x^2 + 3x^3 - 4x^4$  بر  $x^3 - x$  باشد،  $R(2)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

(ریاضی خارج ۹۴)

۳۸۹- اگر عبارت  $x^4 + ax^2 - bx + 4$  بر  $(x-1)^2$  بخش پذیر باشد،  $b$  کدام است؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۳۹۰- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای درجه سوم  $f$  بر دوجمله‌ای‌های  $x-1$ ،  $x+1$  و  $x-2$  برابر ۲۴ است. اگر این چندجمله‌ای بر  $x+2$  بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه کدام است؟

- ۲ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      -۳ (۴)

۳۹۱- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  برابر  $x^2 - 1$  و بر  $x - 2$  برابر  $A$  و بر  $x + 2$  برابر  $B$  باشد؛ آن‌گاه  $A - B$  کدام است؟

- ۸ (۱)      ۲ (۲)      -۲ (۳)      -۸ (۴)

۳۹۲- اگر باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x - 1$  و  $x + 2$  به ترتیب برابر  $-2$  و  $4$  باشد، باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 2$  کدام است؟

- ۲ (۱)       $2x - 4$  (۲)       $6x - 8$  (۳)       $-2x$  (۴)

۳۹۳- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x - 2$  و  $x + 3$  به ترتیب  $1$  و  $-4$  است. باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 6$  کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۷)

- $x - 1$  (۱)       $x + 1$  (۲)       $-x + 2$  (۳)       $2x - 1$  (۴)

۳۹۴- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x - 1$  و  $2x + 1$  به ترتیب  $8$  و  $5$  است. باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $2x^2 - x - 1$  کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

- $-x + 4$  (۱)       $x + 2$  (۲)       $2x + 6$  (۳)       $2x - 3$  (۴)

۳۹۵- باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  و  $x + b$  به ترتیب  $3$  و  $7$  می‌باشد. اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x + b)(x - 1)$  به شکل  $(-x + a)$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

- ۳ (۱)      ۱ (۲)      ۷ (۳)      ۵ (۴)

۳۹۶- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $(x - 3)(x + 3)$  برابر  $5x^2 + 3x + 1$  باشد و باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 3x$  برابر  $ax + b$  باشد؛ آن‌گاه  $2a + b$  کدام است؟

- ۲۰ (۱)      ۳۷ (۲)      -۲۳ (۳)      ۱۹ (۴)

۳۹۷- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  برابر  $2x + 12$  باشد، آن‌گاه باقی مانده تقسیم  $f(x) - 1$  بر  $x + 3$  کدام است؟

- ۶ (۱)      ۶ (۲)      ۱۱ (۳)      -۱۱ (۴)

۳۹۸- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  برابر  $3x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم  $f(x^2 - x - 2)$  بر  $x + 1$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۷ (۲)      -۵ (۳)      -۱۱ (۴)

۳۹۹- اگر باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x)$  بر  $x^2 + 3x + 2$ ،  $x^2 + 1$  و  $2x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x - 1) - p(x - 2)$  بر  $x$  کدام است؟

(کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۴۰۰- اگر  $f(x)$  یک چندجمله‌ای باشد و عبارت  $x + f(x)$  بر  $(x - 1)$  و  $(x - 2)$  بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم  $xf(x)$  بر  $x^2 - 3x + 2$  کدام است؟

- $2x + 3$  (۱)       $-3x + 2$  (۲)       $2x - 3$  (۳)       $3x - 2$  (۴)

۴۰۱- باقی مانده تقسیم  $x^7 - 3x^6 + ax - 1$  بر  $p(x) = x - 1$  برابر  $2$  و خارج قسمت آن  $q(x)$  است.  $q(-1)$  کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش - ۹۸)

- ۷ (۱)      -۶ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)

(ق. ۴۰)

۴۰۲- مقدار خارج قسمت تقسیم  $3 + 14x^3 - 5x^5$  بر  $x - 2$  به ازای  $x = -2$  کدام است؟

- ۲ (۱)      ۱۲ (۲)      ۲۴ (۳)      صفر (۴)

۴۰۳- مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم  $f(x) = x^8 + 3x^5 - 2x^2 + 1$  بر  $x + 1$  کدام است؟

- صفر (۱)      -۳ (۲)      ۳ (۳)      ۲ (۴)

۴۰۴- اگر خارج قسمت تقسیم  $6 + x^7 - x^{10} + 3x^{14}$  بر  $f(x) = x + 1$ ،  $g(x)$  باشد، باقی مانده تقسیم  $g(x)$  بر  $x - 1$  کدام است؟

- صفر (۱)      ۲ (۲)      ۷ (۳)      ۱ (۴)

۴۰۵- عبارت  $x^{24} + 1$  بر کدام عبارت همواره بخش پذیر است؟

- $x^{12} + 1$  (۱)       $x^2 + 1$  (۲)       $x^6 + 1$  (۳)       $x^8 + 1$  (۴)

۴۰۶- عبارت  $a^{28} + b^{42}$  بر کدام یک از عبارتهای زیر بخش پذیر است؟

- $a^7 + b^7$  (۱)       $a^7 + b^6$  (۲)       $a^7 + b^6$  (۳)       $a^7 + b^6$  (۴)

۴۰۷- اگر  $A = \frac{(x^6 - 1)(x + 2)}{x^2 + x - 2}$ ، آن‌گاه ساده شده  $A$  کدام است؟

- $x^3 - x + 1$  (۱)       $x^3 + x + 1$  (۲)       $x^3 + x^2 + x + 1$  (۳)       $x^3 - x^2 + x - 1$  (۴)

۴۰۸- حاصل عبارت  $\frac{(1 - t + t^2 - t^3 + t^4)(1 + t)}{1 - t^{10}}$  به ازای  $t = \sqrt[5]{2}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۱ (۲)       $\frac{1}{3}$  (۳)       $-\frac{1}{3}$  (۴)